UNIVERSITE DE MONASTIR
ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE MONASTIR
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

Résistance des Matériaux

Exercices de travaux dirigés

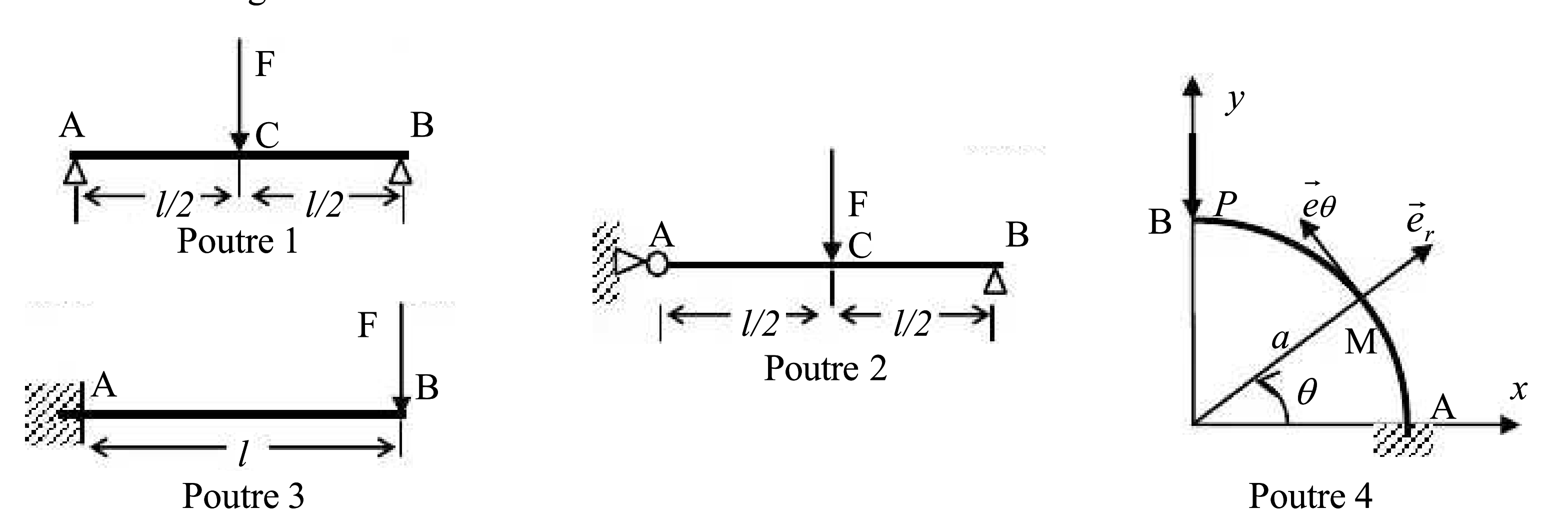
Cours de 1ère année Génie Mécanique

A. DOGUI
Novembre 2014

Liste des exercices

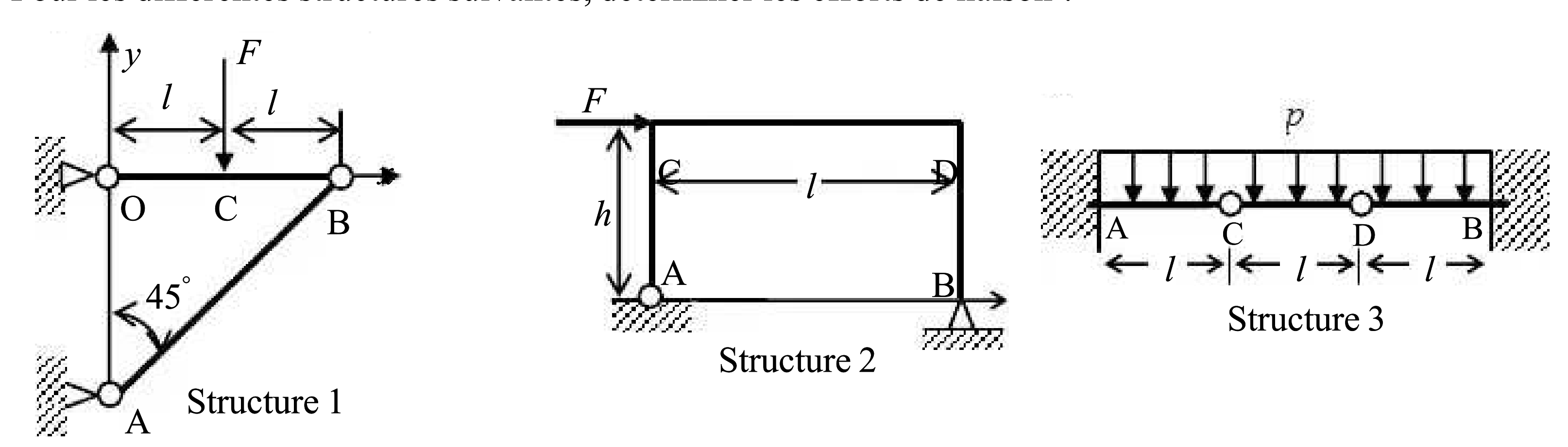
Exercice 01 : Efforts intérieurs

Pour les différentes structures suivantes :
- Déterminer les efforts de liaison et les efforts intérieurs.
- Tracer les diagrammes de ces efforts intérieurs.



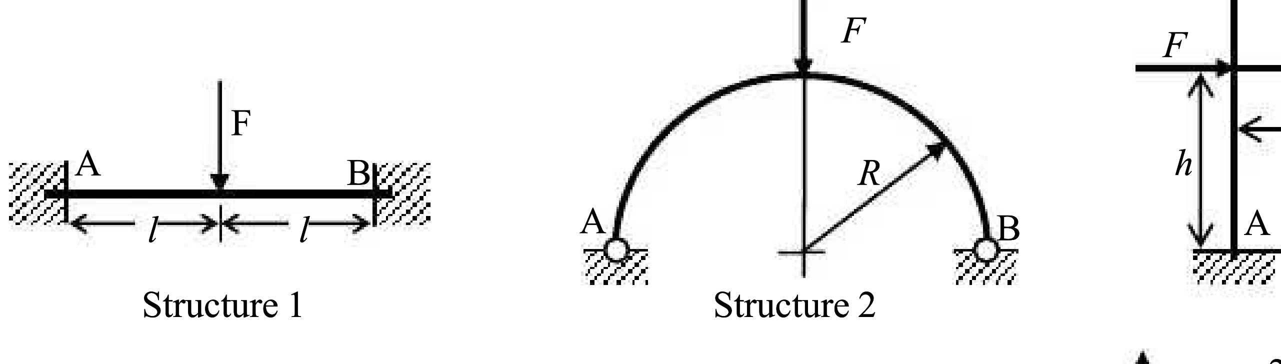
Exercice 02 : Efforts de liaison

Pour les différentes structures suivantes, déterminer les efforts de liaison :



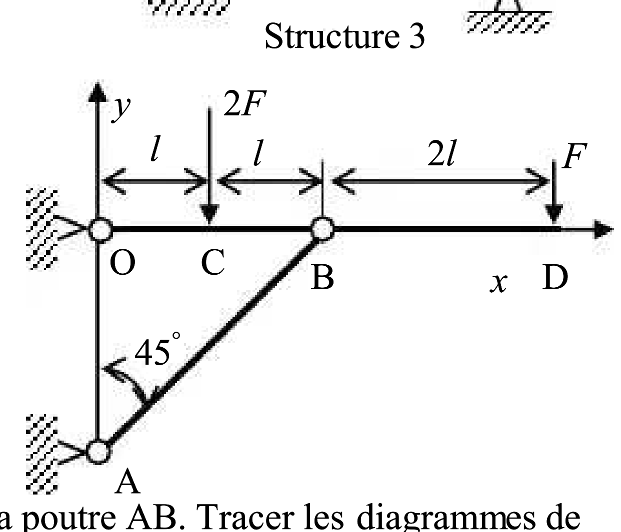
Exercice 03 : Systèmes hyperstatiques

Pour les différentes structures suivantes :
- Déterminer leurs degrés d'hyperstaticité.
- Déterminer les efforts de liaison en fonction des inconnues hyperstatiques.



Exercice 04 : Structure articulée isostatique

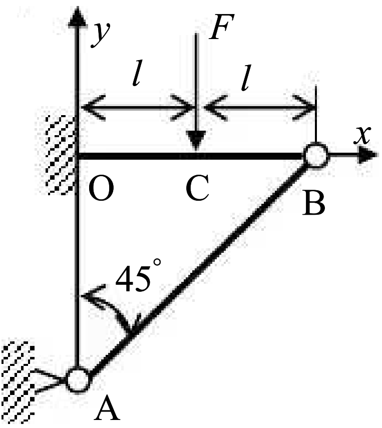
On considère la structure ci-contre constituée par les poutres OBD et AB. Les liaisons en O, A et B sont des articulations parfaites.



1. Déterminer les efforts de liaison.
2. Déterminer les composantes du torseur des efforts intérieurs sur la poutre OBD. Tracer les diagrammes de ces efforts intérieurs.
3. Déterminer les composantes du torseur des efforts intérieurs sur la poutre AB. Tracer les diagrammes de ces efforts intérieurs.

Exercice 05 : Structure articulée hyperstatique

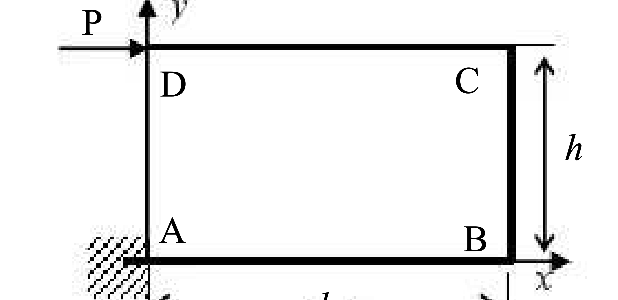
On considère la structure définie par la figure ci-contre, constituée de deux poutres OB et AB. Ces deux poutres sont articulées entre elles en B. La poutre OB est encastrée en O et soumise à son milieu à une force concentrée *F*. La poutre AB est articulée en A.



1. Montrer que cette structure est hyperstatique d'ordre 1.
2. Montrer que la poutre AB est soumise uniquement à la compression. Quelle est la direction de l'effort de liaison exercé par AB sur OB au point B ?
   On désigne par *R* Cet effort. Et on choisira *R* comme inconnue hyperstatique.
3. Déterminer tous les efforts des liaisons en fonction de l'inconnue hyperstatique *R*.
4. Déterminer tous les efforts intérieurs dans la poutre OB en fonction de l'inconnue hyperstatique *R*.

Exercice 06 : Poutre en U

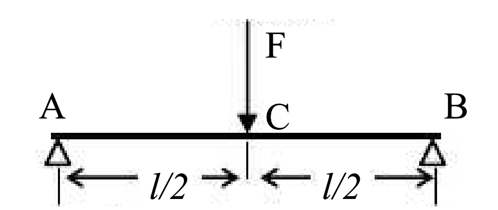
On considère la structure plane ABCD représentée ci-contre et soumise à une force horizontale au point D. La section droite est constante.



1. Caractériser et calculer les efforts de liaison.
2. Calculer les efforts intérieurs dans les trois branches de la structure.
3. Soient *u* et *v* les composantes du déplacement de la ligne moyenne et φ la rotation de la section droite le long de la structure. En considérant successivement chacune des trois branches AB, BC et CD, calculer le torseur des déformations et en déduire le torseur de déplacement. Tracer l'allure de la déformée de la ligne moyenne. En déduire le déplacement horizontal du point D. Identifier les termes provenant des effets de l'effort normal, de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Comparer les ordres de grandeur.

Exercice 07 : Flexion 3 points

On considère une poutre droite de longueur *l,* sur deux appuis à ces extrémités, soumise à son milieu à une force concentrée F (voir figure ci-contre). Le matériau constituant la poutre est élastique linéaire isotrope de module d'Young *E* et de limite d'élasticité en traction σ_e.



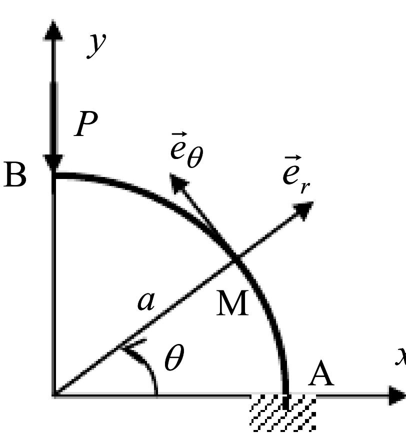
1. Déterminer les efforts intérieurs et tracer les diagrammes correspondants.
2. Déterminer l'énergie de déformation de la poutre (on néglige les effets de l'effort tranchant).
3. On suppose maintenant que la section droite de la poutre est rectangulaire de hauteur *h* et de largeur *b*. Déterminer la flèche *f* (déplacement vertical en valeur absolue) au milieu de la poutre en fonction de *F*, *l, b, h* et le module d'Young *E* et en déduite la rigidité en flexion $k=F/f$.
4. La poutre est maintenant supposée représenter un arbre de machine (poutre cylindrique) de section circulaire constante de diamètre *d*, soumis, en plus de l'effort F (effort du à un engrainement par exemple) à un couple de torsion *Mt* constant. Déterminer le diamètre minimal *d* de l'arbre pour qu'il puisse supporter ces efforts. On utilisera le critère de Von Mises.

Exercice 08 : Charge répartie

On considère une poutre droite de longueur *l,* sur deux appuis à ces extrémités, soumise à une densité linéique de force *p* (voir figure ci-contre). La section droite de la poutre est rectangulaire de hauteur *h* et de largeur *b*. Le matériau constituant la poutre est élastique linéaire isotrope de module d'Young *E* et de limite d'élasticité en traction σ_e.

5. Déterminer les efforts intérieurs et tracer les diagrammes correspondants.
6. Déterminer la déformée de la poutre. En déduire la flèche f (valeur absolue du déplacement vertical du point milieu de la poutre) en fonction de p, l, b, h et du module d'Young E. Déterminer la rigidité en flexion $k=pl/f$.
7. Déterminer la valeur maximale de p que peut supporter cette poutre avant plastification.

Exercice 09 : Poutre curviligne



On considère une poutre AB de section circulaire (diamètre d) en forme de quart de cercle (rayon a). Cette poutre est encastrée en A et chargée en B par une force concentrée verticale P. On orientera la poutre dans le sens AB en prenant $s = a\theta$.

1. Déterminer les efforts de liaison et calculer en fonction de θ les efforts intérieurs au point M.
2. Calculer l'énergie de déformation de la poutre et en déduire le déplacement vertical du point B (calcul complet). Comparer les ordres de grandeurs des différents termes dus aux différentes composantes des efforts intérieurs.
3. Dans quelle section et en quel point de cette section est atteinte la contrainte normale maximale ? Ecrire la condition de dimensionnement.
4. On désigne par u et v les composantes du déplacement du point M dans le repère ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$) et par ω la rotation de la section droite : $\vec{u} = u\vec{e}_r + v\vec{e}_\theta$; $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$

   Montrer que : $$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{a}(\frac{dv}{d\theta} + u)\vec{e}_\theta + \left[\frac{1}{a}(\frac{du}{d\theta} - v) + \omega\right]\vec{e}_r \qquad \vec{\chi} = \frac{1}{a}\frac{d\omega}{d\theta}\vec{e}_z$$

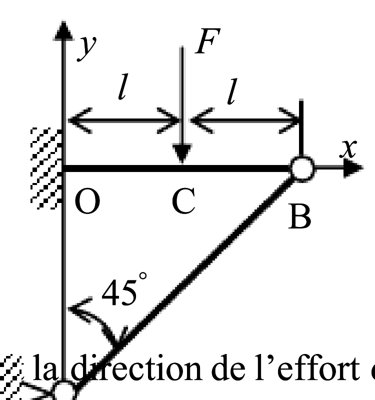
5. Ecrire, en ne tenant compte que de l'effet du moment fléchissant, la loi de comportement de la poutre. Chercher la solution sous la forme :

$$\omega = c_1 \sin\theta$$
$$u = c_2 \sin\theta + c_3 \cos\theta + c_4\theta \sin\theta$$
$$v = c_5 \sin\theta + c_6 \cos\theta + c_7\theta \cos\theta$$

   Où les c_i sont des constantes que l'on déterminera. Vérifier que ces résultats sont en accord avec ceux de la question 2.

6. La même poutre est maintenant supposée soumise à une seule force horizontale Q appliquée en B. Donner, sans calcul supplémentaire, le déplacement vertical du point B.

Exercice 10 : Triangle

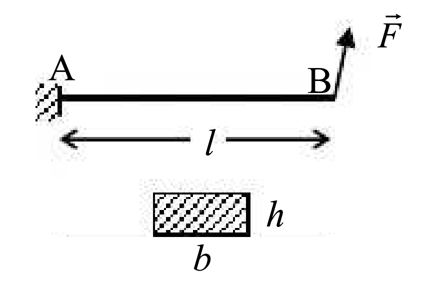


On considère la structure définie par la figure ci-contre, constituée de deux poutres OB et AB. Ces deux poutres sont articulées entre elles en B. La poutre OB est encastrée en O et soumise à son milieu à une force concentrée F. La poutre AB est articulée en A.

5. Montrer que cette structure est hyperstatique d'ordre 1.
6. Montrer que la poutre AB est soumise uniquement à la compression. Quelle est la direction de l'effort de liaison exercé par AB sur OB au point B ?
   On désigne par R Cet effort. Et on choisira R comme inconnue hyperstatique.
7. Déterminer tous les efforts des liaisons en fonction de l'inconnue hyperstatique R.
8. Déterminer tous les efforts intérieurs dans la poutre OB en fonction de l'inconnue hyperstatique R.
9. En négligeant les effets de l'effort normal et de l'effort tranchant, lever l'hyperstaticité et déterminer R en fonction de F.

10. Tracer les diagrammes de l'effort normal, de l'effort tranchant et du moment fléchissant.
11. Déterminer le déplacement vertical du point C.

Exercice 11 : Flexion déviée



On considère une poutre droite de longueur l (selon l'axe $\vec{x}$) et de section droite rectangulaire de hauteur h (selon l'axe $\vec{y}$) et de largeur b (selon l'axe $\vec{z}$). Les axes $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont donc les axes principaux d'inertie de la section droite. Cette poutre est encastrée en A (x=0) et soumise à une force $\vec{F} = Y\,\vec{y} + Z\,\vec{z}$ en B (x=l).

Le matériau constituant cette poutre est homogène, élastique et isotrope. Sa limite élastique en traction est notée σ_e.

L'objectif de cet exercice est de dimensionner cette poutre et de déterminer sa déformée.

- *Efforts intérieurs*

8. Déterminer les efforts de liaison en A.
9. Déterminer les efforts intérieurs.

Dans toute la suite de cet exercice on négligera les effets des efforts tranchants.

- *Dimensionnement*

10. Quel est le point de la ligne moyenne correspondant à la valeur maximale du module du moment fléchissant ? Montrer que cette valeur maximale est comme suit :

$$|\vec{M}_f|_{\max} = l\sqrt{Y^2 + Z^2}$$

11. Déterminer les composantes du tenseur de contrainte, dans le repère ($\vec{x}$,$\vec{y}$,$\vec{z}$), en fonction des coordonnées spatiales (x, y,z), de la géométrie de la section droite et des composantes Y et Z de la force $\vec{F}$.
12. Déterminer la valeur maximale de la contrainte équivalente de Von Mises. Quel est le point de la poutre le plus sollicité en termes de contrainte de Von Mises ?
13. On pose $k = b/h$; déterminer, selon le critère de Von Mises, la valeur minimale de h permettant à la poutre de supporter l'effort $\vec{F}$, en fonction de k, l, Y, Z et σ_e.

- *Déformée*

14. Dans le cadre de l'hypothèse de Navier Bernoulli, montrer que les composantes du torseur de déplacement de la poutre est sous la forme suivante :

$$\vec{u}(x) = u_y(x)\,\vec{y} + u_z(x)\,\vec{z} \qquad ; \qquad \vec{\omega}(x) = -\frac{du_z}{dx}\,\vec{y} + \frac{du_y}{dx}\,\vec{z}$$

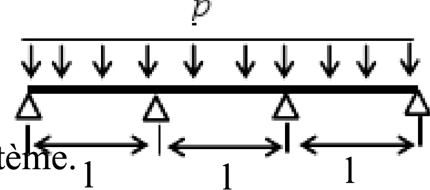
15. Ecrire les équations différentielles qui permettent de déterminer $u_y(x)$ et $u_z(x)$.
16. Déterminer $u_y(x)$ et $u_z(x)$.
17. Déterminer les composantes du vecteur rotation de la section droite.

- *Milieu 1D – Milieu 3D*

18. Déterminer les composantes du vecteur déplacement d'un point de la poutre de coordonnées (x,y,z) .
19. En utilisant le champ de déplacement trouvé en 11, déterminer les composantes du **tenseur** de déformation.
20. En déduire, par la loi de Hooke, en prenant ν=0, les composantes du **tenseur** de contrainte. Comparer avec ce qui est trouvé à la question 4.

Exercice 12 : Poutre sur 4 appuis

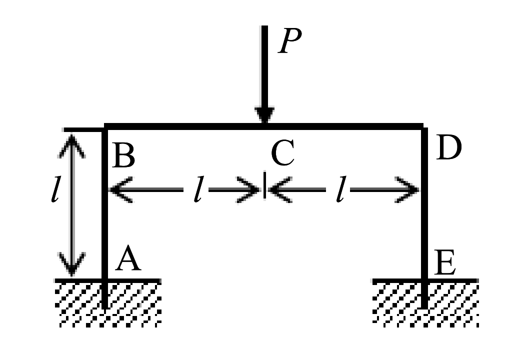
On considère une poutre droite sur quatre appuis simples équidistants, soumise à une charge repartie uniforme de densité linéique p (voir figure ci-contre). Dans tout le problème on négligera l'effet de l'effort tranchant.



1. Caractériser les efforts de liaison et déterminer le degré d'hyperstaticité du système.
2. Déterminer, en fonctions d'inconnues hyperstatiques choisies, les efforts intérieurs dans la poutre.
3. Effectuer la levée de l'hyperstaticité et tracer précisément les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissant.
4. Dans quelle section est atteint le moment fléchissant maximal ? Ecrire la condition de dimensionnement.

Exercice 13 : Portique

On considère le portique ABCDE encastré en A et E, soumis à une charge verticale P au point C. Le portique est constitué d'une poutre élastique à section carrée constante de côté d. Soit E le module d'Young et σ_e la limite élastique du matériau.

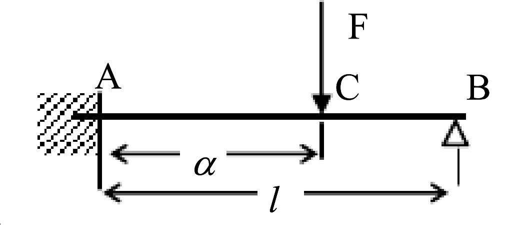


Dans tout cet exercice on négligera les effets de l'effort normal et de l'effort tranchant.

1. Déterminer les efforts intérieurs et tracer les diagrammes correspondants.
2. Déterminer le déplacement vertical du point C.
3. Quelle est la charge P maximale que peut supporter ce portique en restant dans le domaine élastique ?

Exercice 14 : Optimisation de la position d'une force

On considère une poutre droite encastrée en A et sur un appui simple en B, soumise à une force concentrée F en C (voir figure ci-contre).



1. Déterminer les efforts de liaison et les efforts intérieurs en fonction d'une inconnue hyperstatique choisie.
2. Ecrire l'énergie de déformation de la poutre (on néglige les effets de l'effort tranchant) et lever l'hyperstaticité. Montrer que le moment fléchissant en A (M_A) et celui en C (M_C) s'écrivent sous la forme suivante (f_A et f_C étant des fonctions du rapport α/l à déterminer):

$$M_A = F l\, f_A(\alpha/l) \qquad ; \qquad M_C = F l\, f_C(\alpha/l)$$

3. Quelle est la valeur critique du rapport α/l donnant la plus grande valeur de la valeur absolue du moment fléchissant maxi ?
4. Déterminer le déplacement vertical du point C quand $\alpha = l/2$.